CHUYÊN Đề 19: PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

I. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

Người ta hay dùng các phương trình và bất phương trình chứa căn thức cơ bản sau đây:

* $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (1). Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

* $\sqrt{f(x)} < g(x)$ (2). Ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$

* $\sqrt{f(x)} > g(x)$ (3). Ta có (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$

II. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Loại 1. Phương trình và bất phương trình chứa căn thức cơ bản

Thí dụ 1:

Giải các phương trình sau:

1/ $\sqrt{6 - 4x + x^2} = x + 4$ 2/ $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$ 3/ $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x+4} = 2\sqrt{x}$

Bài giải:

1/ Xét phương trình: $\sqrt{6 - 4x + x^2} = x + 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4x + x^2 \ge 0 \\ x + 4 \ge 0 \\ 6 - 4x + x^2 = (x+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ 6 - 4x + x^2 = x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x = -\dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{6}$$

2/ Xét phương trình: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 2 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 \ge 0 \\ x - 3 \ge 0 \\ x + 5 = 4 + x - 3 + 4\sqrt{x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ 1 = \sqrt{x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

3/ Xét phương trình: $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x+4} = 2\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4 \ge 0 \\ x + 4 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ 3x + 4 + x + 4 + 2\sqrt{(3x+4)(x+4)} = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 & (1) \\ 4 + \sqrt{(3x+4)(x+4)} = 0 & (2) \end{cases}$$

Rõ ràng $VT(2) > 0\ \forall x \ge 0$. Vậy hệ (1) (2) vô nghiệm. Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Thí dụ 2:

Giải các phương trình sau:

1/ $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$

2/ $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$

3/ $\dfrac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \dfrac{3}{x}$

4/ $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$

5/ $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$

6/ $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2 - 1}$

Bài giải:

1/ Xét phương trình: $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$ (1)

Đặt $y = x^2 + 5x$, khi đó (1) có dạng: $3y + 2\sqrt{y+1} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{y+1} = 2 - 3y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1 \ge 0 \\ 2-3y \ge 0 \\ 4(y+1) = (2-3y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \frac{2}{3} \\ 4y+4 = 4-12y+9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \frac{2}{3} \\ 9y^2 - 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{16}{9} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$$

Từ đó trở về biến cũ, ta có: $x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -5 \end{array}\right.$

2/ Xét phương trình: $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$ (1)

Đặt $y = x^2 + x + 1$, khi đó (1) có dạng: $\sqrt{y+3} + \sqrt{y} = \sqrt{2y+7} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y+3+y+2\sqrt{y(y+3)} = 2y+7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ \sqrt{y(y+3)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2+3y-4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$$

Từ đó trở về biến cũ, ta có: $x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

3/ Xét phương trình: $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x^2+x}-x)}{x} - \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ 5\sqrt{x^2+x} - 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ 5\sqrt{x^2+x} = 3+3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ 3x+3 \ge 0 \\ 25(x^2+x) = 9x^2+18x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ge -1 \\ 16x^2+7x-9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ge -1 \\ 16x^2+7x-9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{9}{16} \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -1$ và $x = \frac{9}{16}$

4/ Xét phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right| = 2$ (2)

- Nếu $x \ge 2$, khi đó $\sqrt{x-1}-1 \ge 0$, vậy: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

- Nếu $1 \le x < 2$, khi đó $\sqrt{x-1}-1 < 0$, vậy:

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \Leftrightarrow 1 \le x < 2$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $1 \le x \le 2$

5/ Xét phương trình: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-2\right| + \left|\sqrt{x-1}-3\right| = 1$ (2)

- Nếu $x \ge 10$, khi đó $\sqrt{x-1}-3 \ge 0$, vậy

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 10$

- Nếu $x \le 5$, khi đó $\sqrt{x-1}-2 \le 0$, vậy

(2) $\Leftrightarrow 2-\sqrt{x-1}+3-\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$

- Nếu $5 < x < 9$, khi đó $2 < \sqrt{x-1} < 3$, vậy

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \Leftrightarrow 5 < x < 9$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $5 \le x \le 10$

6/ Xét phương trình: $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$ (1)

Điều kiện là: $x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -1\end{array}\right.$

Do nếu $x_0 \ge 1$ là nghiệm của (1) thì $-x_0$ cũng là nghiệm của (1)

Vì thế tạm xét (1) với $x\ge 1$

Khi x = 1, thì VP(1) = 0; $VT(1)\ne 0 \Rightarrow x=1$ không phải là nghiệm.

Khi x > 1, thì $\sqrt[6]{x^2-1}>0$

Vậy (1)$\Leftrightarrow \sqrt[6]{\dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}}-\sqrt[6]{\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}}=1 \Leftrightarrow \sqrt[6]{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt[6]{\dfrac{x-1}{x+1}}-1=0$ (2)

Đặt $y=\sqrt[6]{\dfrac{x+1}{x-1}}>0$, thì (2) có dạng: $y-\dfrac{1}{y}-1=0 \Leftrightarrow y^2-y-1=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (do y > 0)

$\Leftrightarrow \sqrt[6]{\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}=k^6$ (ở đây $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$)

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{2}{x-1}=k^6 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1}=k^6-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{k^6+1}{k^6-1}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\pm\dfrac{k^6+1}{k^6-1}$, với $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Thí dụ 3:

Giải các bất phương trình sau:

1/ $\sqrt{x^2+3x+3}<2x+1$

2/ $\sqrt{8+2x-x^2}>6-3x$

3/ $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+4}>0$

4/ $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$

Bài giải:

1/ Xét bất phương trình $\sqrt{x^2+3x+3}<2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+3\ge 0 & (1) \\ 2x+1\ge 0 & (2) \\ x^2+3x+3<(2x+1)^2 & (3)\end{cases}$$

Do $x^2+3x+3>0\ \forall x$ (vì $\Delta=9-12<0$) nên: (1) (2) (3) $\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2+x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{3}$

2/ Xét bất phương trình $\sqrt{8+2x-x^2}>6-3x$ (1)

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8+2x-x^2\ge 0 \\ 6-3x<0\end{cases} \\ \begin{cases} 8+2x-x^2\ge 0 \\ 6-3x\ge 0 \\ 8+2x-x^2>(6-3x)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2\le x\le 4 \\ x>2\end{cases} \\ \begin{cases} x\le 2 \\ 5x^2-19x+14<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x\le 4 \\ 1<x\le 2\end{array}\right. \Leftrightarrow 1<x\le 4$$

3/ Xét bất phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+4}>0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}>\sqrt{2x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ (x+3)+(x+2)+2\sqrt{(x+3)(x+2)}>2x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 1+2\sqrt{(x+3)(x+2)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -2$

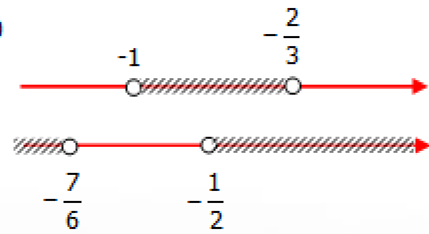
4/ Xét bất phương trình $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$ (1)

Đặt $y=3x^2+5x+2$, khi đó từ (1) có $\sqrt{y+2}-\sqrt{y}>1 \Leftrightarrow \sqrt{y+2}>1+\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ y+2>1+y+2\sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ 1>2\sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow 0\le y\le \frac{1}{4}$

Trở về biến cũ, ta có hệ sau: $\begin{cases} 3x^2+5x+2\ge 0 \\ 3x^2+5x+2\le \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+5x+2\ge 0 \\ 12x^2+20x+7\le 0 \end{cases}$

Biểu diễn trên trục số ta có:



Từ đó suy ra nghiệm cần tìm là: $-\frac{7}{6}\le x\le -1$

Thí dụ 4:

Giải các bất phương trình sau:

1/ $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$ 2/ $\frac{1-\sqrt{21-4x+x^2}}{x+1}\ge 0$ 3/ $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

Bài giải:

1/ Xét bất phương trình $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$ (1)

Chú ý $x\ne 0$ và dùng phép nhân liên hợp ta có: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ \frac{\left(1-\sqrt{1-4x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}<3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ \frac{4x^2}{x\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ \frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ 4x<3\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right) \end{cases}$ (do $1+\sqrt{1-4x^2}>0$ khi có nghiệm)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ 4x-3<3\sqrt{1-4x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ne 0 \\ 1-4x^2\ge 0 \\ 4x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ne 0 \\ 4x-3\ge 0 \\ 9(1-4x^2)>(4x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2} \\ x\ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge \frac{3}{4} \\ 13x^2-6x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{4} \\ 0<x<\frac{6}{13} \end{cases} \end{array}\right.$

vì hệ $\begin{cases} x\ge \frac{3}{4} \\ 0<x<\frac{6}{13} \end{cases}$ vô nghiệm, nên suy ra nghiệm của (1) là $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$ và $x\ne 0$

2/ Xét bất phương trình $\frac{1-\sqrt{21-4x+x^2}}{x+1} \ge 0$ (1) $\Leftrightarrow \frac{1-21+4x-x^2}{(x+1)(\sqrt{21-4x+x^2}+1)} \ge 0$ (2)

Chú ý rằng $x^2-4x+21>0\ \ \forall x \in R$ (do $\Delta' = 4-21<0$)

Vì lẽ đó và do $1+\sqrt{21-4x+x^2}>0\ \ \forall x \in R$, ta có: (2) $\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-20}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+20}{x+1} \le 0$ (3)

Lại do $x^2-4x+20>0\ \ \forall x \in R$ (do $\Delta' = 4-20<0$), nên (3) $\Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$

3/ Xét bất phương trình $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x} > \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$ (1)

Thực hiện phép nhân liên hợp ta có: $\frac{(2x+4)-4(2-x)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} > \frac{2(6x-4)}{\sqrt{9x^2+16}}$

$\Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} > \frac{2(6x-4)}{\sqrt{9x^2+16}} \Leftrightarrow (3x-2)\left[\sqrt{9x^2+16}-2(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})\right] > 0$

(lại nhân liên hợp lần thứ hai)

$\Leftrightarrow (3x-2)(9x^2+8x-32-16\sqrt{8-2x^2})>0 \Leftrightarrow (3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2})(8+x+2\sqrt{8-2x^2})>0$

$\Leftrightarrow (3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2})>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-2>0\\ x-2\sqrt{8-2x^2}>0\end{cases}\\ \begin{cases}3x-2<0\\ x-2\sqrt{8-2x^2}<0\end{cases}\end{array}\right.$ Giải hệ trên ta có : $\left[\begin{array}{l}x>\frac{\sqrt{32}}{3}\\ 2\le x<\frac{2}{3}\end{array}\right.$

Nhận xét:

Trong 3 thí dụ trên chúng ta đều sử dụng phương pháp nhân liên hợp để đơn giản quá trình giải.

Thí dụ 5:

Giải các bất phương trình sau:

1/ $\sqrt{5+x}-\sqrt{-x-3} < -1+\sqrt{(5+x)(-x-3)}$ 2/ $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$

3/ $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$

Bài giải:

1/ Xét bất phương trình $\sqrt{5+x}-\sqrt{-x-3} < -1+\sqrt{(5+x)(-x-3)}$ (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{5+x}-\sqrt{-x-3}+1-\sqrt{(5+x)(-x-3)}<0 \Leftrightarrow (\sqrt{5+x}+1)(1-\sqrt{-x-3})<0$ (2)

Do $5+x\ge 0$ khi $x\ge -5$ (lúc đó $1+\sqrt{5+x}>0$), nên

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -5\\ 1-\sqrt{-3-x}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -5\\ \sqrt{-3-x}>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -5\\ -3-x>1\end{cases} \Leftrightarrow -5\le x<-4$. Đó là nghiệm của (1)

2/ Xét bất phương trình: $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$ (1)

Điều kiện $x\ge 1$. Đặt $y=\sqrt[3]{2-x} \Leftrightarrow y^3=2-x \Leftrightarrow x=2-y^3$

Khi đó (1) có dạng: $y+\sqrt{1-y^3}>1 \Leftrightarrow \sqrt{1-y^3}>1-y$ (2)

Do $x\ge 1$, nên $y=\sqrt[3]{2-x}\le 1$

Vì thế (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}y\le 1\\ 1-y^3>1-2y+y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\le 1\\ y^3+y^2-2y<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\le 1\\ y(y^2+y-2)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le -2\end{cases}$

Trở về biến cũ ta có: $\left[\begin{array}{l}0\le\sqrt[3]{2-x}\le 1\\ \sqrt[3]{2-x}\le -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le 2-x\le 1\\ 2-x\le -8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\le x\le 2\\ x\ge 10\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của (1) là: $1\le x\le 2$ và $x\ge 10$

3/ Xét bất phương trình: $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(x-3)(x+5)}>\sqrt{(x-3)(4x-6)}$ (2)

Miền xác định của (1) là $\begin{cases}(x-3)(x-5)\ge 0\\(x-3)(x+5)\ge 0\\(x-3)(4x-6)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -5\\x=3\\x\ge 5\end{array}\right.$

- Nếu x = 3 thì $VT(2)=VP(2)=0 \Rightarrow x=3$ loại.

- Nếu x > 5, khi đó $x-3>0 \Rightarrow \sqrt{x-3}>0$ và

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-5}+\sqrt{x+5}>\sqrt{4x-6} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 5\\2x+2\sqrt{x^2-25}>4x-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 5\\\sqrt{x^2-25}>x-3\end{cases}$

(do $x\ge 5$, nên x - 3 > 0). Từ đó ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 5\\x^2-25>x^2-6x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 5\\6x>34\end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{17}{3}$

- Nếu x < -5, khi đó viết lại (2) dưới dạng:

$\sqrt{(3-x)(5-x)}+\sqrt{(3-x)(-x-5)}>\sqrt{(3-x)(6-4x)}$ (3)

Vì $x<-5 \Rightarrow 3-x>0 \Rightarrow \sqrt{3-x}>0$, và (3) $\Leftrightarrow \sqrt{5-x}+\sqrt{-x-5}>\sqrt{6-4x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x<-5\\\sqrt{x^2-25}>3-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-5\\x>\frac{17}{3}\end{cases}$: vô nghiệm

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $x>\frac{17}{3}$

Loại 2. Quy phương trình chứa căn thức về hệ phương trình không chứa căn thức

Bằng cách đặt ẩn phụ, ta quy phương trình chứa căn thức về một hệ phương trình không chứa căn thức. Trong chuyên đề "Phương trình và hệ phương trình không chứa căn thức" ta đã đề cập đến một số bài tập thuộc loại này. Ta chỉ xét thêm vài thí dụ nữa.

Thí dụ 1:

Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{2x+1}$ (1)

Bài giải:

Đặt $u=\sqrt[3]{x-2}$; $v=\sqrt[3]{x+3}$, khi đó từ (1) có hệ sau: $\begin{cases}u+v=\sqrt[3]{u^3+v^3} & (2)\\u^3-v^3=-5 & (3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}u^3+3uv(u+v)+v^3=u^3+v^3\\u^3-v^3=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}uv(u+v)=0\\u^3-v^3=-5\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=0\\v=\sqrt[3]{5}\end{cases}\\\begin{cases}v=0\\u=-\sqrt[3]{5}\end{cases}\\\begin{cases}u+v=0\\u^3-v^3=-5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=0\\x+3=5\end{cases}\Leftrightarrow x=2\\\begin{cases}x+3=0\\x-2=-5\end{cases}\Leftrightarrow x=-3\\u^3=-v^3=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow x-2=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy (1) có các nghiệm $x=2$; $x=-3$; $x=-\frac{1}{2}$

Thí dụ 2:

Giải phương trình sau: $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$ (1)

Bài giải:

Viết lại (1) dưới dạng tương đương sau: $2(x^2+2)=5\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-x+1}$ (2)

Đặt $u=\sqrt{x+1}$; $v=\sqrt{x^2-x+1}$, với điều kiện $x\ge -1$

Khi đó ta có: $x^2+2=u^2+v^2$

Vậy từ (2) có: $2(u^2+v^2)=5uv \Leftrightarrow 2u^2+2v^2-5uv=0 \Leftrightarrow (2u-v)(2v-u)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2v \\ v=2u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1}=2\sqrt{x+1} \\ \sqrt{x+1}=2\sqrt{x^2-x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x-3=0 \\ x\ge -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2-5x+3=0 \\ x\ge -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2} \\ \text{Vô nghiệm.} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của (1) là $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

Chú ý:

Tương tự ta có bài toán giải phương trình: $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$

Bằng cách đặt $u=\sqrt{x^2-2x+4}\ge 0$; $v=\sqrt{x+2}\ge 0$

Khi đó $x^2-3x+2=u^2-v^2$

Vậy ta dẫn đến: $2(u^2-v^2)=3uv \Leftrightarrow (u-2v)(v+2u)=0 \Leftrightarrow u=2v$ (do $2u+v>0$

$$\sqrt{x^2-2x+4}=2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{13} \\ x=3-\sqrt{13} \end{array}\right.$$

Thí dụ 3:

Giải phương trình sau: $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^5+\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^5=123$ (1)

Bài giải:

Đặt $u=\sqrt{x^2+1}-x$; $v=\sqrt{x^2+1}+x$

Từ (1) suy ra hệ: $\begin{cases} u^5+v^5=123 & (2) \\ uv=1 & (3) \end{cases}$

Ta có: $u^5+v^5=(u^3+v^3)(u^2+v^2)-u^2v^2(u+v)$ (do $uv=1$)

$=(u^3+v^3)(u^2+v^2)-(u+v)=\left[(u+v)^3-3uv(u+v)\right]\left[(u+v)^2-2uv\right]-(u+v)$

Vì thế (2) (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^5-5(u+v)^3+5(u+v)-123=0 & (4) \\ uv=1 & (5) \end{cases}$

Đặt $t=u+v$, khi đó:

(4) $\Leftrightarrow t^5-5t^3+5t-123=0 \Leftrightarrow (t-3)(t^4+3t^3+4t^2+12t+41)=0$ (6)

Mặt khác $t=u+v=2\sqrt{x^2+1}>0$, do đó từ (6) có

(4) $\Leftrightarrow t-3=0 \Leftrightarrow t=3$

Vậy (4) (5) $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}=3 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Đó chính là nghiệm của (1).

Loại 3. Sử dụng phương trình tương đương hoặc hệ quả để giải phương trình chứa căn thức.

Thí dụ 1:

Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{2x+1}$ (1)

Bài giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-2)+(x+3)+3\left(\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}\right)\sqrt[3]{(x-2)(x+3)}=2x+1$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-2)(x+3)}\left(\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+3=0 \\ \sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \\ x-2=-(x+3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy (1) có 3 nghiệm $x = 2$; $x = -3$; $x=-\frac{1}{2}$

Chú ý:

Trong thí dụ này ta đã sử dụng phép biến đổi tương đương để giải (1).

Thí dụ 2:

Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x+1}$ (1)

Bài giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow (2x-1)+(x-1)+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=3x+1$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1$ (2)

Thay (1) vào (2), ta được phương trình hệ quả sau đây: $\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}.\sqrt[3]{3x+1}=1$ (3)

Bây giờ (3) $\Leftrightarrow (2x-1)(x-1)(3x+1)=1$ (4) $\Leftrightarrow 6x^3-7x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{7}{6} \end{array}\right.$

Do (3) là hệ quả của (1), nên thay x = 0 vào (1), ta có: $\begin{cases} VT(1)=\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{-1}=-2 \\ VP(1)=\sqrt[3]{1}=1 \end{cases}$ Vậy x = 0 bị loại.

Thay $x=\frac{7}{6}$ vào (1), ta có: $\begin{cases} VT(1)=\sqrt[3]{\dfrac{8}{6}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}} \\ VP(1)=\sqrt[3]{\dfrac{27}{6}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}} \end{cases}$ Vậy $x=\frac{7}{6}$ là nghiệm duy nhất của (1)

Chú ý:

Trong thí dụ này:

(1) $\Leftrightarrow$ (2) (2) $\Rightarrow$ (3) (3) $\Leftrightarrow$ (4)

Vậy (1) $\Rightarrow$ (4). Do (4) là hệ quả của (1), nên sau khi có nghiệm x = 0; $x=\frac{7}{6}$ của (4), ta cần có phép thử lại.

Đây cũng là thí dụ chứng tỏ rằng, nếu sử dụng phương trình hệ quả mà không có phép thử lại, thì sẽ có thể dẫn đến việc thừa nghiệm.

Thí dụ 3:

Giải phương trình sau: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$ (1)

Bài giải:

Đặt $u=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\ge 1$

Ta có $\Leftrightarrow u^2=3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3}$ với $u\ge 0$ (2)

Thay (1) vào (2) và dẫn đến phương trình hệ quả sau: $u^2-20=u \Leftrightarrow u^2-u-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=5 \\ u=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow u=5$ (do $u\ge 0$)

Vậy (1) dẫn đến phương trình hệ quả sau:

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3}=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \sqrt{2x^2+5x+3}=21-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 7 \\ x^2-146x+429=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 7 \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=143 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Thử lại x = 3 vào (1) thấy đúng, vậy (1) có nghiệm duy nhất x = 3.

Loại 4. Hệ phương trình chứa căn thức.

Thí dụ 1:

Giải các hệ phương trình sau:

1/ $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7 \\ 3x+2y=23 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases}$

Bài giải:

1/ Từ $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7 & (1) \\ 3x+2y=23 & (2) \end{cases}$

Ta có (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7 & (3) \\ (x+y)+(2x+y+2)=25 & (4) \end{cases}$ Đặt $u=\sqrt{x+y} \ge 0$; $v=\sqrt{2x+y+2} \ge 0$

Khi đó từ (3) (4) có hệ: $\begin{cases} u+v=7 \\ (u+v)^2-2uv=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=7 \\ uv=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+y+2=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=9 \\ 2x+y+2=16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-9;\ y=25 \\ x=5;\ y=4 \end{array}\right.$

Vậy (1) (2) có hai nghiệm (-9, 25); (5, 4)

2/ Từ $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 & (1) \\ x^2+y^2=136 & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+y}\right)^2+\sqrt{x+y}-20=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=4$ (do $\sqrt{x+y} \ge 0$) $\Leftrightarrow x+y=16$

vậy (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ (x+y)^2-2xy=136 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ xy=60 \end{cases}$

vậy hệ (1) (2) có hai nghiệm (10, 6) và (6, 10).

Thí dụ 2:

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} & (1) \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y} & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} x+y \ge 0 \\ x-y \ge 0 \\ x+y \ge x-y \\ xy>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge y > 0$

Khi đó (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} \\ 8=(x+y)-(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{80}{x}}=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4} \\ y=4;\quad x \ge 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{80}{x}=2x+2\sqrt{x^2-16} \\ y=4;\quad x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{40}{x}-x=\sqrt{x^2-16} \\ y=4;\quad x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ 4 \le x \le \sqrt{40} \\ \dfrac{1600}{x^2}+x^2-80=x^2-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ 4 \le x \le \sqrt{40} \\ x^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ (1) (2) là (5, 4)

Thí dụ 3:

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 & (1)\\ x^2+y^2=128 & (2)\end{cases}$

Bài giải:

Đặt $u=\sqrt{x+y}\ge 0$; $v=\sqrt{x-y}\ge 0$

Ta có $\begin{cases}x+y=u^2\\ x-y=v^2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}(u^2+v^2)\\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)\end{array}\right.\Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{u^4+v^4}{2}$

Vậy từ (1) (2) ta có: $\begin{cases}u+v=4 & (3)\\ u^4+v^4=256 & (4)\end{cases}$

Dễ thấy (3) (4) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=4;\ v=0\\ u=0;\ v=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=16\\ x-y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=0\\ x-y=16\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8;\ y=8\\ x=8;\ y=-8\end{array}\right.$

Vậy hệ (1) (2) có các nghiệm (8, 8); (8, -8)

Thí dụ 4:

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18 & (1)\\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=18 & (2)\end{cases}$

Bài giải:

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=10\\ x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10\\ x+y=8\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2xy=64 & (3)\\ x^2+y^2+18+2\sqrt{(xy)^2+9(x^2+y^2)+81}=100 & (4)\end{cases}$

Từ (3) (4) suy ra: $2\sqrt{(xy)^2+9(64-2xy)+81}=82-64+2xy$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(xy)^2+9(64-2xy)+81}=18+2xy$ (5)

Đặt xy = t, từ (5) có: $\sqrt{t^2-18t+657}=9+t$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -9\\ t^2-18t+657=81+18t+t^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -9\\ t=16\end{cases}$

Vậy đi đến hệ $\begin{cases}x+y=8\\ xy=16\end{cases}\Leftrightarrow x=y=4$

Vì thế nghiệm của (1) (2) là (4, 4)

Thí dụ 5:

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5 & (1)\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=8 & (2)\end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện $x\ge 0,\ y\ge 0$

Ta có (1) (2) $\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})+(\sqrt{y+5}+\sqrt{y})=13\\ (\sqrt{x+5}-\sqrt{x})+(\sqrt{y+5}-\sqrt{y})=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})+(\sqrt{y+5}+\sqrt{y})=13\\ \dfrac{5}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}+\dfrac{5}{(\sqrt{y+5}+\sqrt{y})}=3\end{cases}$

Đặt $u=\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$; $v=\sqrt{y+5}+\sqrt{y}$, ta có hệ $\begin{cases}u+v=13\\ \dfrac{5}{u}+\dfrac{5}{v}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=13\\ uv=\dfrac{65}{13}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{13 + \sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2}; \quad v = \dfrac{13 - \sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2} \\ u = \dfrac{13 - \sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2}; \quad v = \dfrac{13 + \sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2} \end{cases}$$

Chú ý:

Ta phải có $u \ge \sqrt{5}, \quad v \ge \sqrt{5}$, nhưng $\dfrac{13 - \sqrt{\dfrac{247}{3}}}{2} < \sqrt{5}$

Vậy hệ (1) (2) vô nghiệm

Thí dụ 6:

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = \sqrt{3} & (1) \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} = \sqrt{3} & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện $-1 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 2$

Viết lại hệ (1) (2) dưới dạng tương đương sau: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = \sqrt{3} \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}) - (\sqrt{2-x} - \sqrt{2-y}) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = \sqrt{3} \\ \dfrac{x-y}{\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}} + \dfrac{x-y}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2-y}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = \sqrt{3} \\ (x-y)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2-y}}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 2; \quad -1 \le y \le 2 \\ x = y \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 2; \quad -1 \le y \le 2 \\ x = y \\ 3 + 2\sqrt{(x+1)(2-x)} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x; \quad -1 \le x \le 2 \\ x = -1 \quad \text{hoặc} \quad x = 2 \end{cases}$$

Vậy (1) (2) có hai nghiệm (-1, -1); (2, 2)

Loại 5. Sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải phương trình và bất phương trình chứa căn thức.

Thí dụ 1:

Giải phương trình sau: $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0 \quad (1)$

Bài giải:

Đặt $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$, với $x \le \dfrac{1}{3}$

Khi đó (1) có dạng f(x) = 0, với miền xác định $x \le \dfrac{1}{3}$

Ta có $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \dfrac{3}{2\sqrt{1-3x}} > 0 \quad \forall x < \dfrac{1}{3}$

Vậy f(x) là hàm số đồng biến khi $x < \dfrac{1}{3}$

Ta có f(-1) = 0. Vậy x = -1 là nghiệm duy nhất của (1)

Thí dụ 2:

Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2+15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2+8} \quad (1)$

Bài giải:

Viết lại (1) dưới dạng $f(x) = 3x - 2 + \sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+15} = 0 \quad (2)$

Hàm số f(x) xác định với mọi x thuộc R. Xét hai khả năng sau:

- Nếu $x \le \frac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 \le 0$. Mặt khác $\sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+15} < 0$

Vậy f(x) < 0 khi $x \le \frac{2}{3} \Rightarrow x \le \frac{2}{3}$ không thể là nghiệm của (2)

- Nếu $x > \frac{2}{3}$. Khi đó ta có $f'(x) = 3 + x\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+8}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+15}}\right] > 0$ (do $x > \frac{2}{3}$)

Vậy f(x) là hàm đồng biến khi $x > \frac{2}{3}$. Mặt khác f(1) = 0

Vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của (1)

Thí dụ 3:

Giải bất phương trình sau: $\sqrt{x+9} > 5 - \sqrt{2x+4}$ (1)

Bài giải:

Viết lại (1) dưới dạng $f(x) = \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5$ (2)

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+9}} + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} > 0 \quad \forall x > -2$

Vậy f(x) là hàm đồng biến khi $x \ge -2$, mặt khác ta có f(0) = 5.

Từ đó suy ra nghiệm của (2) là x > 0.

Thí dụ 4:

Giải phương trình sau: $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$ (1)

Bài giải:

Viết lại (1) dưới dạng tương đương:

$f(x) = \sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)(2x-1)} - 3\sqrt{x+2} = 4$

(với miền xác định $x \ge \frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow f(x) = (\sqrt{x+6} + \sqrt{x+2})(\sqrt{2x-1} - 3) = 4$ (2)

Từ (2) suy ra $\sqrt{2x-1} - 3 \ge 0 \Rightarrow$

Vậy mọi nghiệm (nếu có) của (1) đều lớn hơn hoặc bằng 5. Vì thế xét f(x) với $x \ge 5$

Ta có $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+2}$ và $\sqrt{2x-1} - 3$ là các hàm đồng biến > 0 khi $x \ge 5$

Vậy f(x) là hàm đồng biến khi $x \ge 5$, mặt khác $f(7) = (\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-3) = 4$

Do đó x = 7 là nghiệm duy nhất của (1)

Thí dụ 5:

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} & (1) \\ \sqrt{y} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2} & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Ta có (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} & (3) \\ \sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \sqrt{y} - \sqrt{2-y} & (4) \end{cases}$

Rõ ràng (4) $\Leftrightarrow f(x) = f(y)$, ở đây $f(t) = \sqrt{t} - \sqrt{2-t}$, với $0 \le t \le 2$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{2-t}} > 0$

Vậy f(t) là hàm đồng biến khi $0 \le t \le 2$. Từ đó $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Vậy (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y; \quad 0 \le x \le 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2} \end{cases}$

Dễ thấy từ đây suy ra x = y = 0 hoặc x = y = 2

Đó là hai nghiệm của hệ (1), (2)

Loại 6. Phương pháp đánh giá hai vế để giải phương trình và bất phương trình chứa căn thức.

Phương pháp này dựa trên nhận xét sau:

Với phương trình $f(x) = g(x), \ x \in D$ có tính chất sau: $\begin{cases} f(x) \ge A \ \forall x \in D \\ g(x) \le A \ \forall x \in D \end{cases}$

Khi đó $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$

Để phát hiện ra các bất đẳng thức $f(x) \ge A$; $g(x) \le A \quad \forall x \in A$, ta sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức.

Xét các thí dụ sau:

Thí dụ 1:

Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11 \quad (1)$

Bài giải:

Ta thấy miền xác định của (1) là $D = \{x : 2 \le x \le 4\}$

Ta có $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2 \quad \forall x \in D$

Mặt khác nếu đặt $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$, với $x \in D$, thì $f^2(x) = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} \le 2 + [(x-2) + (4-x)] = 4$

Do $f(x) \ge 0$ khi $x \in D \Rightarrow f(x) \le 2 \quad \forall x \in D$

Từ đó suy ra: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 11 = 2 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x - 2 = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của (1)

Thí dụ 2:

Giải phương trình sau: $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \quad (1)$

Bài giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{3x^2 - 5x - 1} = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \quad (2)$

Ta thấy miền xác định của (2) là $D = \left\{ x : \begin{matrix} 3x^2 - 7x + 3 \ge 0 \\ 3x^2 - 5x - 1 \ge 0 \\ x^2 - 2 \ge 0 \\ x^2 - 3x + 4 \ge 0 \end{matrix} \right\}$

Bằng phép nhân liên hợp, ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{(3x^2 - 7x + 3) - (3x^2 - 7x + 3)}{\sqrt{3x^2 - 7x + 3} + \sqrt{3x^2 - 7x + 3}} = \frac{(x^2 - 2) - (x^2 - 3x + 4)}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x + 4}{\sqrt{3x^2 - 7x + 3} + \sqrt{3x^2 - 7x + 3}} = \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} \quad (3)$$

- Nếu $x > 2$ và $x \in D$, thì VP(3) > 0, VT(3) < 0, do đó loại khả năng này.
- Nếu $x < 2$ và $x \in D$, thì VP(3) < 0, VT(3) > 0, do đó loại khả năng này.
- Với $x = 2$, thì rõ $x \in D$ và thỏa mãn (3), do VP = VT = 0.

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của (1)

Thí dụ 3:

Giải các phương trình sau:

1/ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$ 2/ $\dfrac{x^2-6x+15}{x^2-6x+11}=\sqrt{x^2-6x+18}$

Bài giải:

1/ Xét phương trình: $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$ (1)

Ta có $VT(1)=\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}\geq 2+3=5$ (2)

$VP(1)=5-(x^2+2x+1)=5-(x+1)^2\leq 5$ (3)

Từ (2) (3) suy ra: $\begin{cases}VT(1)=5\\VP(1)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=0\\x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$

Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của (1)

2/ Xét phương trình: $\dfrac{x^2-6x+15}{x^2-6x+11}=\sqrt{x^2-6x+18}$ (1)

Ta có $VT(1)=1+\dfrac{4}{x^2-6x+11}=1+\dfrac{4}{(x-3)^2+2}\leq 1+\dfrac{4}{2}=3$

$VP(1)=\sqrt{(x-3)^2+9}\geq 3$

Từ đó (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}VT(1)=3\\VP(1)=3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của (1)

Thí dụ 4:

Giải các phương trình sau:

1/ $\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2}=\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{1}{2}$

2/ $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Bài giải:

1/ Xét phương trình: $\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2}=\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{1}{2}$ (1)

Ta thấy (1) $\Leftrightarrow\sqrt{(x^2+x+1)(5x-2)}=\dfrac{(x^2+x+1)+(5x-2)}{2}$ (2)

Chú ý điều kiện để (1) có nghĩa là $5x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{2}{5}$

Từ (2) và theo bất đẳng thức Côsi suy ra: (2) $\Leftrightarrow x^2+x+1=5x-2\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

2/ Xét phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$ (1)

Điều kiện là $\begin{cases} x^2+2x \ge 0 \\ 2x-1 \ge 0 \\ 3x^2+4x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$

Do $x \ge \frac{1}{2}$, nên có thể viết lại (1) dưới dạng tương đương sau:

$\sqrt{x}.\sqrt{x+2}+1.\sqrt{2x-1}=\sqrt{(x+1)(3x+1)}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$(\sqrt{x}.\sqrt{x+2}+1.\sqrt{2x-1})^2 \le (x+1)(3x+1)$ (3)

Từ (2) (3) suy ra ta có: $\frac{\sqrt{x}.}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x}=\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ 2x^2-x=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy (1) có nghiệm duy nhất $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Loại 7. Phương trình và bất phương trình chứa căn thức có tham số.

Dạng 1. Giải và biện luận phương trình và bất phương trình căn thức có tham số

Thí dụ 1:

Giải và biện luận theo a phương trình sau: $\sqrt{x-4a+16}-2\sqrt{x-2a+4}+\sqrt{x}=0$ (1)

Bài giải:

Viết lại (1) dưới dạng tương đương sau: $\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\sqrt{x-2a+4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4a-16 \\ x \ge 0 \\ x \ge 2a-4 \\ 2x-4a+16+2\sqrt{x^2-4ax+16x}=4x-8a+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4a-16 \\ x \ge 0 \\ x \ge 2a-4 \\ \sqrt{x^2-4ax+16x}=x-2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4a-16 \\ x \ge 0 \\ x \ge 2a-4 \\ x \ge 2a \\ x^2-4ax+16x=x^2-4ax+4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4a-16 & (1) \\ x \ge 0 & (2) \\ x \ge 2a & (3) \\ x=\frac{a^2}{4} & (4) \end{cases}$

Thấy khi $x=\frac{a^2}{4}$ thì $x \ge 0$ và $x \ge 4a-16$ [do $\frac{a^2}{4} \ge 4a-16 \Leftrightarrow \frac{(a-8)^2}{4} \ge 0$]

Vì thế (1) (2) (3) (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a^2}{4} \\ x \ge 2a \end{cases}$

Ta có $\Leftrightarrow \frac{a^2}{4}-2a=\frac{a^2-8a}{4}$

Vì $a^2-8a \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 0 \\ a \ge 8 \end{cases}$

$a^2-8a<0 \Leftrightarrow 0<a<8$

Tóm lại:

- Nếu $0<a<8$: Phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu $\begin{cases} a \le 0 \\ a \ge 8 \end{cases}$: Phương trình (1) có nghiệm $x=\frac{a^2}{4}$

Thí dụ 2:

Giải và biện luận theo m phương trình sau: $\sqrt{x^2+x+\dfrac{m^2}{(x-1)^2}}=x-\dfrac{m}{x-1}$ (1)

Bài giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x-\dfrac{m}{x-1} \geq 0 \\ x^2+x+\dfrac{m^2}{(x-1)^2}=x^2+\dfrac{m^2}{(x-1)^2}-\dfrac{2mx}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x-\dfrac{m}{x-1} \geq 0 \\ x(x-1+2m)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 & (2) \\ x-\dfrac{m}{x-1} \geq 0 & (3) \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1-2m \end{array}\right. & (4) \end{cases}$

Để x = 0 thỏa mãn (2) và (3), ta cần có $0-\dfrac{m}{-1} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$

Để x = 1 - 2m thỏa mãn (2) và (3), ta cần có $\begin{cases} 1-2m \neq 1 \\ 1-2m-\dfrac{m}{1-2m-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Từ đó suy ra:

- Nếu m < 0: Phương trình có nghiệm x = 1 - 2m
- Nếu m = 0: Phương trình có nghiệm x = 0
- Nếu $0 < m \leq \dfrac{3}{4}$: Phương trình có nghiệm x = 0 và x = 1 − 2m
- Nếu $m > \dfrac{3}{4}$: Phương trình có nghiệm x = 0

Thí dụ 3:

Giải và biện luận theo m phương trình sau: $\sqrt{x}-\sqrt{x-m} > m$ (1)

Bài giải:

Xét các khả năng sau:

1. Nếu m = 0 thì (1) có dạng $\sqrt{x}-\sqrt{x} > 0$ (2)

Từ đó suy ra (2) tức là (1) vô nghiệm.

2. Nếu m > 0, ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} > m+\sqrt{x-m} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x > m^2+x-m+2m\sqrt{x-m} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ m-m^2 > 2m\sqrt{x-m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m & (3) \\ 1-m > 2\sqrt{x-m} & (4) \end{cases}$

Từ (3) (4) ta thấy

a) Nếu $m \geq 1$ thì $1-m \leq 0 \Rightarrow$ (4) vô nghiệm $\Rightarrow$ Hệ (3) (4) vô nghiệm.

b) Nếu 0 < m < 1 thì (3) (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ (1-m)^2 > 4(x-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x < \left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2 \end{cases}$

chú ý là do $\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2 > m$ (vì $m \neq 1$ nên $\left(\dfrac{m-1}{2}\right)^2 > 0$)

Vì thế (3) (4) $\Leftrightarrow m \leq x < \left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2$

3. Nếu m < 0, ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} - m > \sqrt{x-m} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x + m^2 - 2m\sqrt{x} > x - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2m\sqrt{x} > m^2 + m \end{cases}$

Do m < 0, nên (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 & (5) \\ 2\sqrt{x} > m + 1 & (6) \end{cases}$

- Nếu m + 1 < 0 (tức m < -1), thì (5) (6) $\Leftrightarrow x \ge 0$

- Nếu $-1 \le m < 0$ (khi đó $m + 1 \ge 0$) lúc này (5) (6) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x > \dfrac{(m+1)^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{(m+1)^2}{4}$

Vậy ta có kết luận sau:

1. Nếu m < -1: $x \ge 0$

2. Nếu $-1 \le m < 0$: $x > \dfrac{(m+1)^2}{4}$

3. Nếu m = 0 hoặc $m \ge 1$: bất phương trình vô nghiệm

4. Nếu $0 < m < 1$: $m \le x < \dfrac{(m+1)^2}{4}$

Thí dụ 4:

Giải và biện luận theo a bất phương trình sau: $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$ (1)

Bài giải:

Xét các khả năng sau:

1. Nếu a = 0, bất phương trình (1) có dạng $2x + \sqrt{-x^2} > 0$ (2) Rõ ràng (2) vô nghiệm.

2. Nếu a > 0, bất phương trình (1) có dạng $\sqrt{a^2 - x^2} > -2x$ (3)

Ta thấy (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 - x^2 \ge 0 \\ -2x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 - x^2 \ge 0 \\ -2x \ge 0 \\ a^2 - x^2 > 4x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -a \le x \le a \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -a \le x \le a \\ x \le 0 \\ x^2 < \dfrac{a^2}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le a \\ -\dfrac{a\sqrt{5}}{5} < x \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\dfrac{a\sqrt{5}}{5} < x \le a$

3. Nếu a < 0, khi đó (3) tương đương với hệ sau: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 - x^2 \ge 0 \\ -2x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 - x^2 \ge 0 \\ -2x \ge 0 \\ a^2 - x^2 > 4x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le -a \\ \dfrac{a\sqrt{5}}{5} < x \le -a \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{5}}{5} < x \le -a$

Tóm lại ta có kết luận sau: 1. Nếu a = 0: Phương trình (1) vô nghiệm.

2. Nếu $a \ne 0$: Phương trình (1) có nghiệm là $-\dfrac{|a|\sqrt{5}}{5} \le x \le |a|$

Dạng 2. Các bài toán định tính về phương trình và bất phương trình chứa tham số

Thí dụ 1:

Cho phương trình: $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=m$

Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài giải:

Giả sử phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x_0. Vì x_0 là nghiệm nên ta có:

$\sqrt{4-x_0}+\sqrt{x_0+5}=m$ (1)

Từ (1) có $\sqrt{4-(-1-x_0)}+\sqrt{5+(-1-x_0)}=m$ (2)

Từ (2) suy ra $(-1-x_0)$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Do tính duy nhất nên có $x_0=-1-x_0 \Rightarrow x_0=-\frac{1}{2}$

Thay lại vào (1) có $\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{9}{2}}=m$ hay $m=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Vậy điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất là $m=3\sqrt{2}$

Đảo lại: khi $m=3\sqrt{2}$, ta có phương trình: $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-5\le x\le 4\\ 9+2\sqrt{(4-x)(x+5)}=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5\le x\le 4\\ 2\sqrt{-x^2-x+20}=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5\le x\le 4\\ -4x^2-4x+80=81\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5\le x\le 4\\ (2x+1)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $m=3\sqrt{2}$

Nhận xét:

1/ Ta xét cách giải thứ hai như sau:

Đặt $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}$, với $-5\le x\le 4$

Khi đó phương trình đã cho có dạng $f(x)=m$ (*)

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+5}}{2.\sqrt{x+5}.\sqrt{4-x}}$

Lập bảng biến thiên sau:

x	-5		$-\frac{1}{2}$		4
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗		↘	

Từ đó suy ra (*) có nghiệm duy nhất (tức là phương trình đã cho có nghiệm duy nhất) khi và chỉ khi:

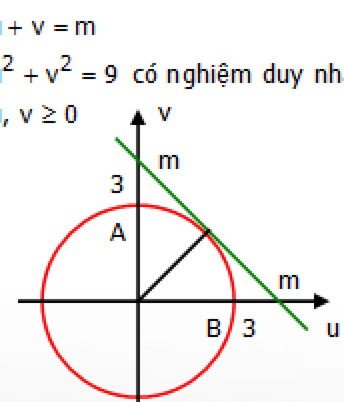
$m=f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\sqrt{2}$

2/ Ta xét cách giải thứ ba như sau:

Đặt $u=\sqrt{4-x}\ge 0$, $v=\sqrt{x+5}\ge 0$

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất tương đương với hệ sau: $\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=m\\ u^2+v^2=9\\ u, v\ge 0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Từ đó suy ra hệ trên có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $u+v=m$ là tiếp tuyến với cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ (cung ở góc phần tư thứ nhất), tức là khi và chỉ khi $m=3\sqrt{2}$



Thí dụ 2:

Cho phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(x+3)(6-x)}=m$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài giải:

Đặt $u=\sqrt{x+3}\ge 0,\ v=\sqrt{6-x}\ge 0$

Từ (1) có $\begin{cases} u+v-uv=m & (2) \\ u^2+v^2=9 & (3) \end{cases}$

(3) $\Leftrightarrow (u+v)^2-2uv=9 \Leftrightarrow (u+v)^2-2[(u+v)-m]=9$

$\Leftrightarrow (u+v)^2-2(u+v)+2m=9 \Leftrightarrow (u+v)^2-2(u+v)+2m-9=0$ (4)

Ta nhận thấy để (4) có nghiệm cần có $\Delta'=1-(2m-9)\ge 0 \Leftrightarrow 10-2m\ge 0 \Leftrightarrow m\le 5$ (5)

Để ý rằng $\Leftrightarrow u+v=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}\ge 0 \Leftrightarrow (u+v)^2=9+2\sqrt{(x+3)(6-x)}\ge 9 \Leftrightarrow u+v\ge 3$

Mặt khác $1-\sqrt{10-2m}\le 1$

Vì thế khi $m\le 5$, thì từ (4) có $u+v=1+\sqrt{10-2m}$ (nghĩa là chắc chắn loại $u+v=1-\sqrt{10-2m}$).

Do vậy suy ra (2) (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1+\sqrt{10-2m} \\ u^2+v^2=9 \\ u\ge 0,\ v\ge 0 \end{cases}$

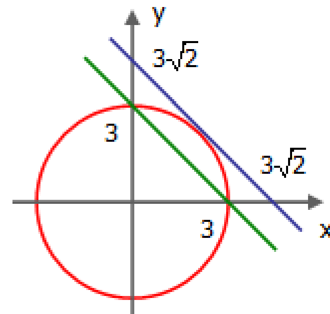
Dễ thấy (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) (3) có nghiệm.

Cũng thấy ngay điều đó xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $u+v=1+\sqrt{-10+2m}$ nằm giữa hai đường thẳng u + v = 3 và $u+v=3\sqrt{2}$, tức là khi và chỉ khi:

$3\le 1+\sqrt{10-2m}\le 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\le\sqrt{10-2m}\le 3\sqrt{2}-1$

$\Leftrightarrow 4\le 10-2m\le 19-6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{2}-9}{2}\le m\le 3$

Đó là các giá trị cần tìm của m để cho (1) có nghiệm.



III. BÀI TẬP CỦNG CỐ KIẾN THỨC

1. Các đề thi tuyển sinh ĐH - CĐ

Bài 1: (Đại học, Cao đẳng khối B - 2002)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} & (1) \\ x+y=\sqrt{x+y+2} & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$

Đặt $u=\sqrt[6]{x-y}\ge 0$, khi đó (1) $\Leftrightarrow u^2=u^3 \Leftrightarrow u^2(1-u)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \end{array}\right.$

Đặt $v=x+y\ge 0$, khi đó từ (2) có $v=\sqrt{v+2} \Leftrightarrow \begin{cases} v\ge 0 \\ v^2-v-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow v=2$

Vậy (1) (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ v=2 \end{cases} \\ \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ (1) (2) có hai nghiệm (1, 1), $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

Bài 2: (Đại học Cao, đẳng khối D - 2002)

Giải bất phương trình: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \ge 0$ (1)

Bài giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x = 2) \vee \left(x = -\frac{1}{2}\right) \\ \begin{cases} \left(x < -\frac{1}{2}\right) \vee (x > 2) \\ (x \le 0) \vee (x \ge 3) \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x = 2) \vee \left(x = -\frac{1}{2}\right) \\ \left\{\left(x < -\frac{1}{2}\right) \vee (x \ge 3)\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\frac{1}{2} \\ x = 2 \\ x \ge 3 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của (1) là $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \{2\} \cup [3, +\infty)$

Bài 3: (Đại học, Cao đẳng khối A - 2004)

Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 16 \ge 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 4$

Với $x \ge 4$, viết lại (1) dưới dạng tương đương sau:

$\sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} > 10 - 2x$ (2)

Ta có (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 4 \\ 10 - 2x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 4 \\ 10 - 2x \ge 0 \\ 2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ \begin{cases} 4 \le x \le 5 \\ x^2 - 20x + 66 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ \begin{cases} 4 \le x \le 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x \le 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 10 - \sqrt{34}$

Vậy nghiệm của (1) là $x > 10 - \sqrt{34}$

Bài 4: (Đại học, Cao đẳng khối D - 2004)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 & (1) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m & (2) \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài giải:

Đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$. Khi đó hệ (1) (2) có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} u + v = 1 & (3) \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m & (4) \\ u \ge 0,\ v \ge 0 & (5) \end{cases}$$

Ta có $u^3 + v^3 = 1 - 3m \Leftrightarrow (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 1 - 3m$

Khi $u + v = 1$, ta có $u.v = m$

Vậy (3) (4) (5) $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 & (6) \\ u.v = m & (7) \\ u \ge 0,\ v \ge 0 & (8) \end{cases}$

Hệ (6) (7) (8) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình: $t^2 - t + m = 0$ chỉ có nghiệm $t \ge 0$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$ (do $S = 1 > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m \ge 0 \\ m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{1}{4}$

Vậy $0 \le m \le \frac{1}{4}$ là tất cả các giá trị cần tìm của tham số m.

Bài 5: (Đại học, Cao đẳng khối A - 2005)

Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$ (1)

Bài giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{5x-1} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 1 \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ 2x - 4 \ge 0 \\ 5x - 1 > x - 1 + 2x - 4 + 2\sqrt{(x-1)(2x-4)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 5x - 1 > 3x - 5 + 2\sqrt{(x-1)(2x-4)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 & (2) \\ x + 2 > \sqrt{(x-1)(2x-4)} & (3) \end{cases}$$

Khi $x \ge 2$, thì $x + 2 > 0$, nên

$$(2)\,(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 + 4x + 4 > 2x^2 - 6x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 10x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x < 10$$

Vậy nghiệm của (1) là $2 \le x < 10$

Bài 6: (Đại học, Cao đẳng khối D - 2005)

Giải phương trình: $2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = 4$ (1)

Bài giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} - \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow 2\left|\sqrt{x+1}+1\right| - \sqrt{x+1} = 4$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+1}+1) - \sqrt{x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của (1)

Bài 7: (Đại học, Cao đẳng khối A - 2006)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 & (1) \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{y+1} = 4 & (2) \end{cases}$

Bài giải:

Ta có $(2) \Leftrightarrow x + 1 + y + 1 + 2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 16$

$\Leftrightarrow 2 + x + y + 2\sqrt{xy + x + y + 1} = 16$ (3)

Đặt $t = \sqrt{xy}$, thì từ (1) có $x + y = 3 + t$, rồi thay vào (3) và có

$\Leftrightarrow 2 + t + 2\sqrt{t^2 + 3 + t + 1} = 14 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 + t + 4} = 11 - t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 11 \\ 4t^2 + 4t + 16 = 121 - 22t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 11 \\ 3t^2 + 26t - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 11 \\ \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\dfrac{105}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 3 \Leftrightarrow xy = 9$$

Vậy (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3$

Vậy (3, 3) là nghiệm duy nhất của (1) (2)

Chú ý:

Ta có thể giải hệ (1) (2) bằng phương pháp "đánh giá hai vế" như sau:

Từ (1) và theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$x + y = 3 + \sqrt{xy} \le 3 + \dfrac{x+y}{2} \Rightarrow x + y \le 6$ (4)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$(\sqrt{x+1}.1 + \sqrt{y+1}.1)^2 \le \left[(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{y+1})^2\right](1^2 + 1^2)$

$\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} \le \sqrt{2(x+y+2)}$ (5)

Thay (4) vào (5) và có: $4 = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} \le 4$

Điều đó chứng tỏ rằng trong bất đẳng thức Bunhiacopski có dấu bằng.

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x+1}}{1} = \dfrac{\sqrt{y+1}}{1} \Leftrightarrow x = y$

Vậy đi đến hệ $\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3$

Bài 8: (Đại học, Cao đẳng khối D - 2006)

Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ (1)

Bài giải:

Điều kiện $x \ge \frac{1}{2}$, đặt $t=\sqrt{2x-1} \ge 0 \Rightarrow t^2=2x-1 \Rightarrow x=\frac{t^2+1}{2}$

Khi đó (1) có dạng: $t+\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2-3\frac{t^2+1}{2}+1=0 \Leftrightarrow t^4-4t^2+4t-1=0$

$\Leftrightarrow (t^2-1)(t^2+1)-4t(t-1)=0 \Leftrightarrow (t-1)\left[(t+1)(t^2+1)-4t\right]=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left[t^3+t^2-3t+1\right]=0 \Leftrightarrow (t-1)(t-1)(t^2+2t-1)=0$

Do $t \ge 0$, nên suy ra $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1+\sqrt{2} \end{array}\right.$

Trở về biến cũ, ta có $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy (1) có hai nghiệm $x_1=1,\ x_2=2-\sqrt{2}$

Chú ý:

Ta có thể giải hệ (1) (2) bằng phương pháp "trực tiếp" như sau:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=-x^2+3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \ge 0 \\ 2x-1=(-x^2+3x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 2x-1=x^4+9x^2+1-6x^3+2x^2-6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{5}}{2} & (2) \\ x^4-6x^3+11x^2-8x+2=0 & (3) \end{cases}$

Ta có $(3) \Leftrightarrow (x-1)(x^3-5x^2+6x-2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x^2-4x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \\ x=2+\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vì $x=2+\sqrt{2} \notin \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ (do $2+\sqrt{2}>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$)

Vậy (2) (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Bình luận:

(1) thử trí "kiên nhẫn" của người giải!

Bài 9: (Đại học, Cao đẳng khối B - 2006)

Cho phương trình: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ (1)

Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt.

Bài giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\geq 1 \\ x^2+mx+2=4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} & (2) \\ f(x)=3x^2+x(4-m)-1=0 & (3) \end{cases}$

Bài toán trở thành: Tìm m để hệ (2) (3) có hai nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi (3) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_2>x_1\geq -\frac{1}{2}$

Theo định lí đảo về dấu tam thức bậc hai, ta cần có: $\begin{cases} \Delta>0 & (4) \\ af\left(-\frac{1}{2}\right)\geq 0 & (5) \\ \frac{S}{2}>-\frac{1}{2} & (6) \end{cases}$

Do a = 3 > 0, và chú ý $\frac{c}{a}<0$ $(a=3;\ c=-1)$, nên $\Delta>0$ vì thế

$$(4)(5)(6) \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right)\geq 0 \\ \frac{S}{2}>-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-9\geq 0 \\ \frac{m-4}{6}>-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq \frac{9}{2} \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq \frac{9}{2}$$

Vậy $m\geq \frac{9}{2}$ là tập hợp các giá trị cần tìm của tham số m.

Bài tập tự giải

IV. BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1:

Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2+\sqrt{19-2x}}{x}=1$ Đáp số: x = 5

b) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$ Đáp số: x = 5

c) $\sqrt{\frac{20+x}{x}}.\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$ Đáp số: vô nghiệm

d) $\frac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+\frac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2+x}}=2\sqrt{2}$ Đáp số: x = -2; $x=1+\sqrt{5}$

e) $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$ Đáp số: x = 1; $x=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

f) $\sqrt{5x-5}+\sqrt{10x-5}=\sqrt{15x-10}$ Đáp số: x = 1

Bài 2:

Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases}$ Đáp số: (-3, 4); (4, -3)

b) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ x^2y+y^2x=20 \end{cases}$ Đáp số: (1, 4); (4, 1)

Bài 3:

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x-12+2\sqrt{x^2-16}$ Đáp số: x = 5

b) $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$ Đáp số: $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

c) $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$ Đáp số: $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=4 \end{array}\right.$

d) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$ Đáp số: x = 2

e) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$ Đáp số: $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$

f) $\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2-4x+8}=4x-x^2-1$ Đáp số: x = 2

Bài 4:

Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ Đáp số: x = 2; y = -1

b) $\begin{cases} 3(\sqrt{x}+\sqrt{y})=4\sqrt{x}.\sqrt{y} \\ xy=9 \end{cases}$ Đáp số: (1, 9); (9, 1)

c) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$ Đáp số: (4, 4)

d) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ Đáp số: (2, -1)

e) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2} \\ x^2+y^2+xy=21 \end{cases}$ Đáp số: (1, 4); (4, 1); (-1, -4); (-4, -1)

Bài 5:

Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{8x^2-6x+1}-4x+1\le 0$ Đáp số: $\left(x=\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(x\ge\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\sqrt{x^2+2x-15}<x-2$ Đáp số: $3\le x<\dfrac{19}{6}$

c) $\sqrt{x^2-4x+5}+2x\ge 3$ Đáp số: $x\ge\dfrac{2}{3}$

d) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$ Đáp số: $\dfrac{\sqrt{13}-5}{2}<x\le 1$

e) $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$ Đáp số: $\left(x>\dfrac{5}{3}\right)\vee\left(1<x<\dfrac{5}{4}\right)$

f) $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}\ge 0$ Đáp số: $-1\le x<\sqrt[3]{4}$

k) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$ Đáp số: $x\ge\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}$

l) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$ Đáp số: $1<x\le\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

Bài 6:

Giải và biện luận theo a bất phương trình sau: $\sqrt{x-a}>\sqrt{x-2a}+\sqrt{x-3a}$

Đáp số: 1/ Nếu a < 0: vô nghiệm

2/ Nếu $a\ge 0$: $3a\le x<\dfrac{2a(3+\sqrt{3})}{3}$

Bài 7:

Giải và biện luận theo a bất phương trình sau: $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\le\sqrt{2}$

Đáp số: 1/ Nếu a < 0: vô nghiệm

2/ Nếu $0\le a\le 1$: $0\le x\le a^2$

3/ Nếu $1<a\le 2$: $4(a-1)\le x\le a^2$

4/ Nếu a > 2: vô nghiệm

Bài 8:

Tìm m để bất phương trình có nghiệm: $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}\ge m$

Đáp số: $m\le 3\sqrt{2}$

Giaó viên thực hiện: NGUYỄN THANH VÂN